

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ ДИФРАКЦИИ

Проведено численное моделирование эффектов дифракции в строгой математической постановке вне рамок теории дифракции Френеля-Кирхгофа. Рассмотрение основывается на решении краевой задачи дифракции для уравнения Гельмгольца, восходящей к трудам А. Зоммерфельда, Ф. Франка и М. Борна. Представлены расчеты дифракции плоской электромагнитной ТЕ-волны, падающей под произвольным углом на металлическую идеально-проводящую полуплоскость. Определены угловые и радиальные распределения действительной и мнимой частей строгого решения уравнения Гельмгольца. Вычислен вектор Пойнтинга для электромагнитной волны. Определены угловые и радиальные распределения для интенсивности излучения.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, дифракционный интеграл, краевые дифракционные задачи, численное моделирование дифракции, дифракция на полуплоскости.

A. V. Borovsky
A. N. Borodin
A. L. Galkin

NUMERICAL SIMULATION OF DIFFRACTION EFFECTS

The article presents numerical simulation of diffraction effects in strict mathematical statement beyond the frameworks of the Fresnel-Kirchhoff diffraction theory. The research is based on the solution of the boundary-value problem of diffraction for the Helmholtz equation, which traces its roots to the works of A. Sommerfeld, F. Frank and M. Born. The article contains calculations of diffraction of flat electromagnetic TE-wave that falls on any angle on a metal ideally conducting half-plane. The authors determine angular and radial distributions of the real and imaginary parts of the rigorous solution of the Helmholtz equation, calculate the Poynting vector for electromagnetic wave, and determine angular and radial distributions for radiation intensity.

Keywords: Helmholtz equation, diffraction integral, boundary-value diffraction problems, numerical simulation of diffraction, diffraction on half-plane.

В задачах построения и обработки изображений возникают искажения оптических полей на краях диафрагм, которые проявляются затем как оптические помехи. Важной задачей оптики изображений является борьба с оптическими помехами, для чего необходимо разработать методы их подавления.

Для оптических устройств восстановления и преобразования сигналов важно обеспечить не только высокую скорость вычислений, но и минимум дополнительных помех. Одним из существенных источников шумов в оптических системах является рассеяние света на поверхностях и внутренних дефектах прозрачных оптических элементов, а также на границах оправ и фильтрующих элементов, участвующих в формировании изображения [3]. Наибольшую актуальность эти вопросы имеют при

наблюдении мало контрастных объектов, где наиболее информативные участки находятся в поле зрения рядом с источниками, имеющими высокую яркость. В связи с этим, приобретают интерес задачи строгой (математической) дифракции на металлических поверхностях. При этом необходимо выйти за рамки приближенной теории Френеля-Кирхгофа, которая неудовлетворительно описывает оптическое поле вблизи металлических поверхностей, а также отражение и рассеяние электромагнитного излучения на них.

Наиболее строгий подход дает применение стационарного волнового уравнения (уравнения Гельмгольца). Для большинства применений достаточным является пространственно двумерное приближение, в рамках которого возможно применение элегантных методов теории функций комплексной переменной для решения уравнения Гельмгольца. Исследование такой задачи носит фундаментальный характер в сфере теоретической и математической физики и восходит к трудам А. Зоммерфельда [6]. Впоследствии задачами строгой теории дифракции занимались Ф. Франк и Р. Мизес [9], М. Борн и Э. Вольф [1], значительный вклад внес Г. Гринберг [5], раздел, посвященный дифракции на клине имеется в книге Л. Ландау и М. Лифшица [7]. Теорией уравнения Гельмгольца занимались Дж. Грин [10], Дж. Кирхгоф [11], А. Тихонов, А. Самарский [8] и В. Владимиров [4].

Задача дифракции представляет интерес в разных геометриях. В данной статье рассмотрим результаты численного моделирования задачи Зоммерфельда — дифракции на металлической идеально-проводящей полуплоскости.

Физическая постановка задачи Зоммерфельда иллюстрируется (рис. 1). Из бесконечности на металлическую идеально-проводящую полуплоскость под углом γ к ней падает плоская электромагнитная волна. Задача изучается в полярных координатах. Радиус-вектор точки наблюдения имеет полярные координаты r, φ . Волновой вектор падающей волны обладает полярными координатами (k, α) . Угол падения плоской волны γ , который называют в литературе углом Зоммерфельда, равен $\gamma = \alpha - \pi$. В задаче для углов $0 < \varphi < \pi - \gamma$ имеется падающая и отраженная волны геометрической оптики, для углов $\pi - \gamma < \varphi < \pi + \gamma$ имеется только падающая (она же прошедшая волна), и для углов $\pi + \gamma < \varphi < 2\pi$ имеет место геометрическая тень. Кроме того, на волны геометрической оптики во всех диапазонах углов накладывается дифрагировавшее (или рассеянное) излучение. Известно [1], что причиной, вызывающей появление отраженной от металлической поверхности волны геометрической оптики, а также рассеянных волн, являются поверхностные токи, индуцированные в пограничном слое металла падающей волной.

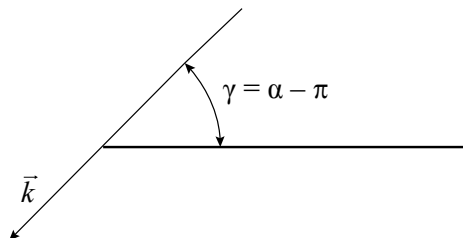


Рис. 1. Дифракция на полуплоскости под углом Зоммерфельда γ

В работах классиков современной физики [1; 6; 9] получены аналитические решения указанной задачи. Они являются строгими решениями краевой задачи для уравнения Гельмгольца. С точки зрения математики

эти решения носят интегральный характер, и их аналитическое исследование крайне затруднено. В частности, в курсе теоретической физики Л.Д. Ландау и М.Е. Лифшица приведена постановка данной задачи, однако, ее решение отсутствует по причине значительной сложности и незавершенности, как отмечают авторы [7]. Применение современных компьютерных и программных средств позволяет провести эффективное численное моделирование решений Зоммерфельда, Франка и Борна.

Начнем изложение с обсуждения уравнений модели. Монохроматические действительные скалярные поля в теории Максвелла в общем случае записываются в виде (вектора отмечаем жирными буквами):

$$E(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r})\cos(\omega t) + q(\mathbf{r})\sin(\omega t),$$

$$E(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}(U(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)),$$

$$U(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) + iq(\mathbf{r}),$$

$$\operatorname{Re}U(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}),$$

$$\operatorname{Im}U(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}).$$

Для стационарных задач, в которых функции p и q не зависят от времени, комплексная функция $U(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + U = 0.$$

Здесь

$$\rho = kr = \frac{2\pi}{\lambda} r,$$

где λ — длина волны. На верхней и нижней поверхностях полуплоскости ставятся условия первого типа

$$U|_{\varphi=0} = 0, \quad U|_{\varphi=2\pi} = 0;$$

или условия второго типа:

$$\partial U / \partial \varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad \partial U / \partial \varphi|_{\varphi=2\pi} = 0.$$

Остальные условия краевой задачи для уравнения Гельмгольца (условия излучения на бесконечности) учтены в используемом аналитическом решении.

Как показали М. Борн и Э. Вольф [1, с. 517], двумерная задача, когда решение зависит от двух координат ρ и φ , распадается на линейную суперпозицию двух скалярных задач для волн ТЕ (transverse E) и ТН (transverse H) поляризации. Имеется в виду поперечность электрического или магнитного поля к плоскости падения волны, параллельной волновому вектору и нормали к полуплоскости. Волна ТЕ-поляризации содержит три компоненты поля:

$$TE \rightarrow \begin{cases} (0, 0, E_z) \\ (H_x, H_y, 0) \end{cases}.$$

Из них компонента электрического поля E_z параллельна краю полуплоскости. Компоненты магнитного поля H_x , H_y перпендикулярны краю полуплоскости, причем компонента H_x параллельна полуплоскости, а компонента H_y перпендикулярна ей.

Волна ТН-поляризации также содержит три компоненты поля, но других. Причем направления магнитного и электрического векторов меняются местами в сравнении с волной ТЕ-поляризации, описанной выше:

$$TH \rightarrow \begin{cases} (E_x, E_y, 0) \\ (0, 0, H_z) \end{cases}.$$

Для каждой поляризации возникает скалярная задача для комплексных функций:

$$E_z(\mathbf{r}) = U_E(\mathbf{r}), \quad H_z(\mathbf{r}) = U_H(\mathbf{r}).$$

Граничными условиями для ТЕ волны являются

$$U_E|_{\Gamma} = 0.$$

Граничными условиями для ТН волны являются

$$\left. \frac{\partial U_H}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma} = 0.$$

В данной статье ограничимся рассмотрением случая ТЕ-волны.

Строгое решение задачи дифракции плоской ТЕ-волны на идеально-проводящей полуплоскости имеет вид [1; 6; 9]:

$$U(\rho, \varphi, \gamma) = U_2^C(\rho, \varphi - \gamma) - U_2^C(\rho, \varphi + \gamma).$$

Здесь,

$$U_2^C(\rho, \theta) = \exp(i\rho \cos\theta) \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2\rho}}^{\infty} \exp(-i\mu^2) d\mu -$$

дифракционный интеграл Франка-Зоммерфельда, а γ -угол Зоммерфельда. Эти формулы являются частным случаем более сложной теории, которая рассмотрена авторами в работе [2].

Преобразуем дифракционный интеграл к виду удобному для проведения численных расчетов. Для этого воспользуемся равенством

$$\int_{-\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2\rho}}^{\infty} \exp(-i\mu^2) d\mu = \int_{-\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2\rho}}^0 \exp(-i\mu^2) d\mu + \int_0^{\infty} \exp(-i\mu^2) d\mu.$$

В первом интеграле в правой части сделаем замену переменных $\mu \rightarrow -\mu$. Второй интеграл вычислим. В результате получим

$$\int_{-\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2\rho}}^{\infty} \exp(-i\mu^2) d\mu = \int_0^{\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2\rho}} \exp(-i\mu^2) d\mu + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right).$$

Подставим выведенную формулу в исходную формулу для дифракционного интеграла:

$$U_2^C(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \exp(i\rho \cos\theta) + \exp(i\rho \cos\theta) \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2\rho}} \exp(-i\mu^2) d\mu. \quad (1)$$

Формула (1) удобна для проведения численного моделирования, так как не содержит несобственного интеграла.

Функция (1) допускает выделение действительной и мнимой частей:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} U_2^C(\rho, \theta) &= \frac{1}{2} \cos(\rho \cos\theta) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \cos\left(\rho \cos\theta + \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2\rho}} \cos\mu^2 d\mu + \sin\left(\rho \cos\theta + \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2\rho}} \sin\mu^2 d\mu \right\}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} U_2^c(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \sin(\rho \cos \theta) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sin\left(\rho \cos \theta + \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\cos \frac{\theta}{2} \sqrt{2\rho}} \cos \mu^2 d\mu - \cos\left(\rho \cos \theta + \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\cos \frac{\theta}{2} \sqrt{2\rho}} \sin \mu^2 d\mu \right\},$$

которые необходимы для вычисления интенсивности излучения.

Вычислим интенсивность излучения. Будем исходить из известного выражения для усредненной по времени плотности потока энергии (вектора Пойнтинга):

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^*). \quad (2)$$

Ниже коэффициент $\frac{c}{8\pi}$ опустим.

Поля \mathbf{E} и \mathbf{H} следующим образом выражаются через решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца:

$$E_z = U,$$

$$H_x = \cos \varphi H_r - \sin \varphi H_\varphi,$$

$$H_y = \sin \varphi H_r + \cos \varphi H_\varphi.$$

$$H_r = \frac{1}{i\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = \frac{1}{i\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

$$H_\varphi = i \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i \frac{\partial U}{\partial \rho}.$$

Вычисление векторного произведения (2) приводит к выражению:

$$\mathbf{S} = \operatorname{Re}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^*) = -e_x \operatorname{Re}(E_z H_y^*) + e_y \operatorname{Re}(E_z H_x^*).$$

Найдем $E_z H_y^*$ и $E_z H_x^*$, выражая поля через решение уравнения Гельмгольца U

$$\begin{aligned} E_z H_y^* &= U(\sin \varphi H_r + \cos \varphi H_\varphi)^* = \sin \varphi U \left(-\frac{1}{i\rho} \frac{\partial U^*}{\partial \varphi} \right) + \cos \varphi U \left(-i \frac{\partial U^*}{\partial \rho} \right) = \\ &= i \frac{\sin \varphi}{\rho} U \frac{\partial U^*}{\partial \varphi} - i \cos \varphi U \frac{\partial U^*}{\partial \rho}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z H_x^* &= U(\cos \varphi H_r - \sin \varphi H_\varphi)^* = \cos \varphi U \left(-\frac{1}{i\rho} \frac{\partial U^*}{\partial \varphi} \right) - \sin \varphi U \left(-i \frac{\partial U^*}{\partial \rho} \right) = \\ &= i \frac{\cos \varphi}{\rho} U \frac{\partial U^*}{\partial \varphi} + i \sin \varphi U \frac{\partial U^*}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

Вектор Пойнтинга принимает следующий вид:

$$\mathbf{S} = e_x \operatorname{Re} \left(-i \left[\frac{\sin \varphi}{\rho} U \frac{\partial U^*}{\partial \varphi} - \cos \varphi U \frac{\partial U^*}{\partial \rho} \right] \right) + e_y \operatorname{Re} \left(i \left[\frac{\cos \varphi}{\rho} U \frac{\partial U^*}{\partial \varphi} + \sin \varphi U \frac{\partial U^*}{\partial \rho} \right] \right).$$

Взятие реальной части приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= e_x \left(-\frac{\sin \varphi}{\rho} \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \varphi} \right] + \cos \varphi \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \rho} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \rho} \right] \right) + \\ &+ e_y \left(\frac{\cos \varphi}{\rho} \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \varphi} \right] + \sin \varphi \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \rho} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \rho} \right] \right). \end{aligned}$$

Интенсивность пропорциональна модулю вектора \vec{S} . Для нее получим:

$$I = |S| = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left[\operatorname{Re}U \frac{\partial \operatorname{Im}U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im}U \frac{\partial \operatorname{Re}U}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[\operatorname{Re}U \frac{\partial \operatorname{Im}U}{\partial \rho} - \operatorname{Im}U \frac{\partial \operatorname{Re}U}{\partial \rho} \right]^2}. \quad (3)$$

Для расчета интенсивности необходимо определить производные. После достаточно громоздких аналитических вычислений находим:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Re}U_2^c(\rho, \theta) = -\cos\theta \cdot \operatorname{Im}U_2^c(\rho, \theta) + \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}};$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Im}U_2^c(\rho, \theta) = \cos\theta \cdot \operatorname{Re}U_2^c(\rho, \theta) - \sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}};$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Re}U_2^c(\rho, \theta) = \rho \sin\theta \cdot \operatorname{Im}U_2^c(\rho, \theta) - \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin\frac{\theta}{2};$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im}U_2^c(\rho, \theta) = -\rho \sin\theta \cdot \operatorname{Re}U_2^c(\rho, \theta) + \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin\frac{\theta}{2}.$$

Для определения интенсивности необходимо вычислить $\operatorname{Re}U(\rho, \varphi, \gamma)$ и $\operatorname{Im}U(\rho, \varphi, \gamma)$, а также их производные для функции:

$$U(\rho, \varphi, \gamma) = U_2^c(\rho, \varphi - \gamma) - U_2^c(\rho, \varphi + \gamma), \quad (4)$$

$$U_2^c(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \exp(i\rho \cos\theta) + \exp(i\rho \cos\theta) \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \cos\frac{\theta}{2} \sqrt{2\rho}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\cos\frac{\theta}{2} \sqrt{2\rho}} \exp(-i\mu^2) d\mu. \quad (5)$$

Опуская подробности аналитических вычислений, выпишем результирующие формулы:

$$\operatorname{Re}U(\rho, \varphi, \gamma) = \operatorname{Re}U_2^c(\rho, \varphi - \gamma) - \operatorname{Re}U_2^c(\rho, \varphi + \gamma), \quad (6)$$

$$\operatorname{Im}U(\rho, \varphi, \gamma) = \operatorname{Im}U_2^c(\rho, \varphi - \gamma) - \operatorname{Im}U_2^c(\rho, \varphi + \gamma),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Re}U(\rho, \varphi, \gamma) &= -\cos(\varphi - \gamma) \operatorname{Im}U_2^c(\rho, \varphi - \gamma) + \\ &+ \cos(\varphi + \gamma) \operatorname{Im}U_2^c(\rho, \varphi + \gamma) + \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Im}U(\rho, \varphi, \gamma) &= \cos(\varphi - \gamma) \operatorname{Re}U_2^c(\rho, \varphi - \gamma) - \\ &- \cos(\varphi + \gamma) \operatorname{Re}U_2^c(\rho, \varphi + \gamma) - \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re}U(\rho, \varphi, \gamma) &= \rho \sin(\varphi - \gamma) \operatorname{Im}U_2^c(\rho, \varphi - \gamma) - \\ &- \rho \sin(\varphi + \gamma) \operatorname{Im}U_2^c(\rho, \varphi + \gamma) + \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \cos\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Im}U(\rho, \varphi, \gamma) &= -\rho \sin(\varphi - \gamma) \operatorname{Re}U_2^c(\rho, \varphi - \gamma) + \\ &+ \rho \sin(\varphi + \gamma) \operatorname{Re}U_2^c(\rho, \varphi + \gamma) - \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) \cos\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

В данной работе проведено численное моделирование дифракции ТЕ-волны на металлической идеально-проводящей полуплоскости. В основу расчетов положены формулы (3–7). Для проведения расчетов привлекались программные пакеты объектного программирования «Математика» и «MathCad».

В качестве первой задачи был рассчитан дифракционный интеграл Франка-Зоммерфельда. На рис. 2 приведены угловые распределения дифракционных интегралов $\text{Re}U_2^D(\rho, \theta)$, $\text{Re}U_2^C(\rho, \theta)$ в диапазоне углов $-8\pi < \theta < 8\pi$ для значения $\rho = 1$. Оба дифракционных интеграла для задачи дифракции на полуплоскости являются четными функциями, обладающими периодом 4π . Это подтверждают графики этих функций. На рис. 2 так же представлен график дифракционного интеграла $\text{Re}U_2^D(\rho, \theta)$ для значения $\rho = 10$. С увеличением радиуса растет количество максимумов и минимумов в структуре дифракционного интеграла.

В качестве второй задачи было рассмотрено нормальное падение плоской волны. Здесь угол Зоммерфельда равен $\gamma = \pi / 2$.

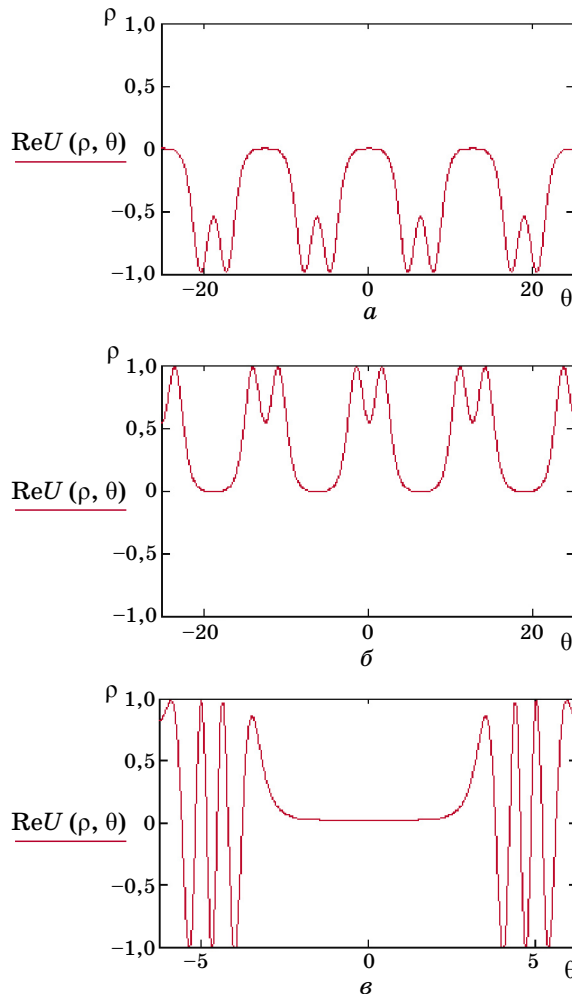


Рис. 2. Дифракционный интеграл Франка-Зоммерфельда — четная функция с периодом 4π : а — $\text{Re}U_2^D(\rho, \theta)$ при $\rho = 1$; б — $\text{Re}U_2^C(\rho, \theta)$ при $\rho = 1$; в — $\text{Re}U_2^D(\rho, \theta)$ при $\rho = 10$

На рис. 3 представлены угловые распределения в полярных координатах действительной части решения уравнения Гельмгольца в диапазоне углов $0 < \varphi < 2\pi$ при различных фиксированных значениях радиуса $\rho = 1, 10, 50$.

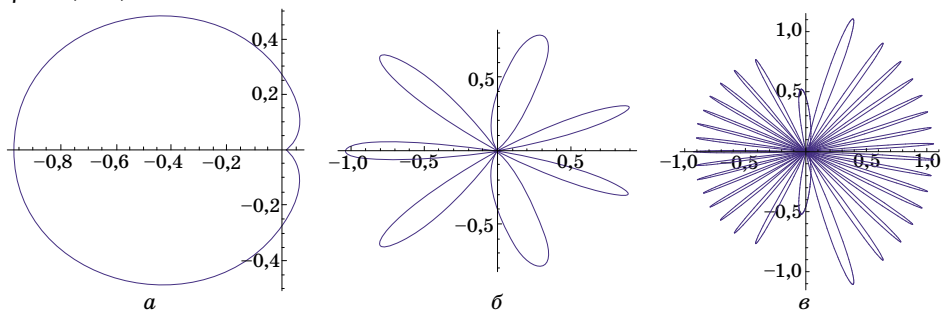


Рис. 3. Угловое распределение $\text{Re}U(\varphi)$ при нормальном ($\gamma = \pi / 2$) падении плоской волны на полуплоскость в полярных координатах: $a - \rho = 1$; $b - \rho = 10$; $v - \rho = 50$

На рис. 4 представлены угловые распределения действительной части решения уравнения Гельмгольца в диапазоне углов $0 < \varphi < 2\pi$ при различных фиксированных значения радиуса $\rho = 1, 10, 50$.

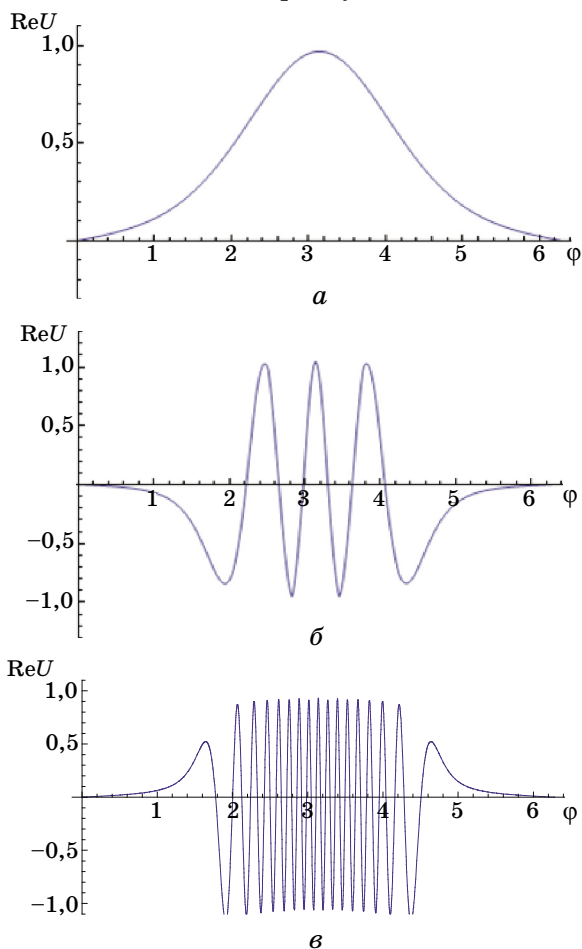


Рис. 4. Угловое распределение $\text{Re}U(\varphi)$ при нормальном ($\gamma = \pi / 2$) падении плоской волны на полуплоскость: $a - \rho = 1$; $b - \rho = 10$; $v - \rho = 50$

На рис. 5 представлены угловые распределения модуля решения.

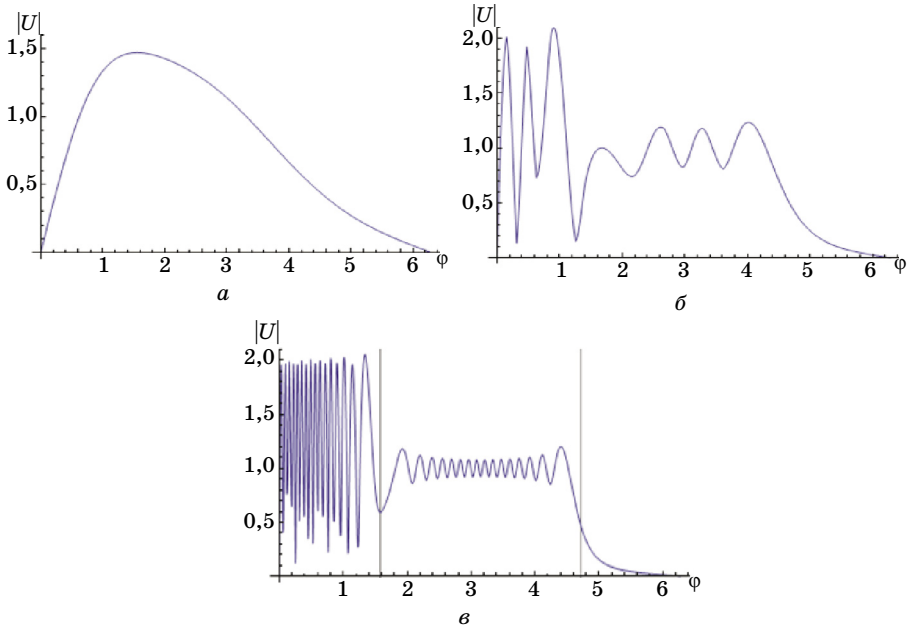


Рис. 5. Угловое распределение $|U(\varphi)|$ при нормальном ($\gamma = \pi / 2$) падении плоской волны на полуплоскость: а — $\rho = 1$; б — $\rho = 10$; в — $\rho = 50$

На рис. 6 представлены радиальные распределения действительной части решения при фиксированных значениях угла $\varphi = \pi / 4, \pi / 2, \pi$.

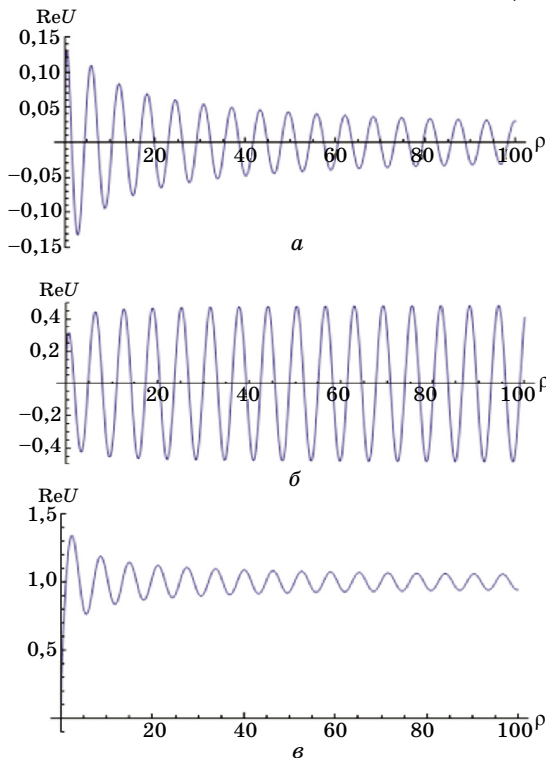


Рис. 6. Радиальное распределение $ReU(\rho)$ при нормальном ($\gamma = \pi / 2$) падении плоской волны на полуплоскость: а — $\varphi = \pi / 4$; б — $\varphi = \pi / 2$; в — $\varphi = \pi$

На рис. 7 представлены угловые распределения интенсивности излучения в диапазоне углов $0 < \varphi < 2\pi$ при различных фиксированных значения радиуса $\rho = 1, 10, 50$.

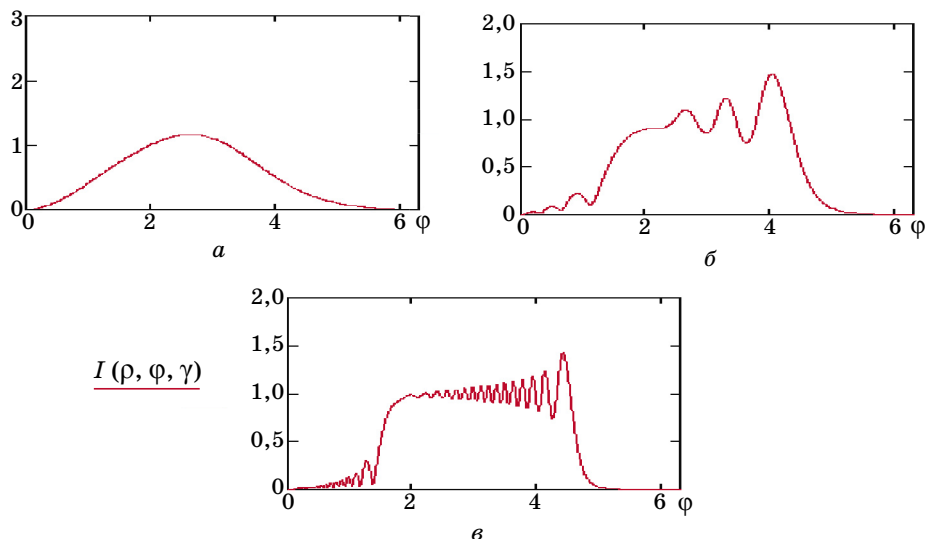


Рис. 7. Угловые распределения интенсивности $I(\varphi)$ при нормальном ($\gamma = \pi / 2$) падении плоской волны на полуплоскость: а — $\rho = 1$; б — $\rho = 10$; в — $\rho = 50$

На рис. 8 представлены радиальные распределения интенсивности излучения в диапазоне радиусов $0 < \rho < 50$ при различных фиксированных значениях угла наблюдения $\varphi = \pi / 2, \pi, 3\pi / 2$.

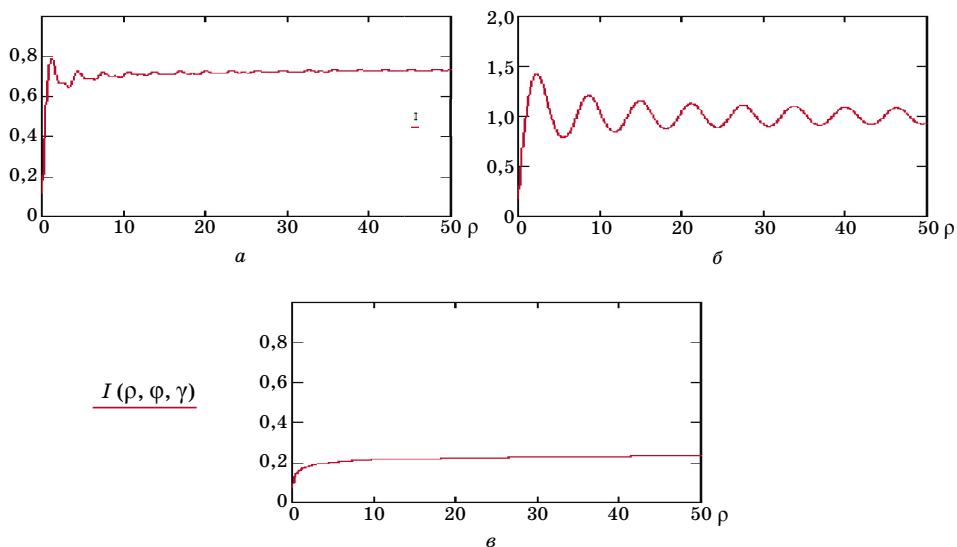


Рис. 8. Радиальные распределения интенсивности $I(\rho)$ при нормальном ($\gamma = \pi / 2$) падении плоской волны на полуплоскость: а — $\varphi = \pi / 2$; б — $\varphi = \pi$; в — $\varphi = 3\pi / 2$

В качестве третьей задачи рассмотрено наклонное падение плоской волны на полуплоскость под углом $\gamma = \pi / 3$. Результаты численного моделирования представлены на рис. 9.

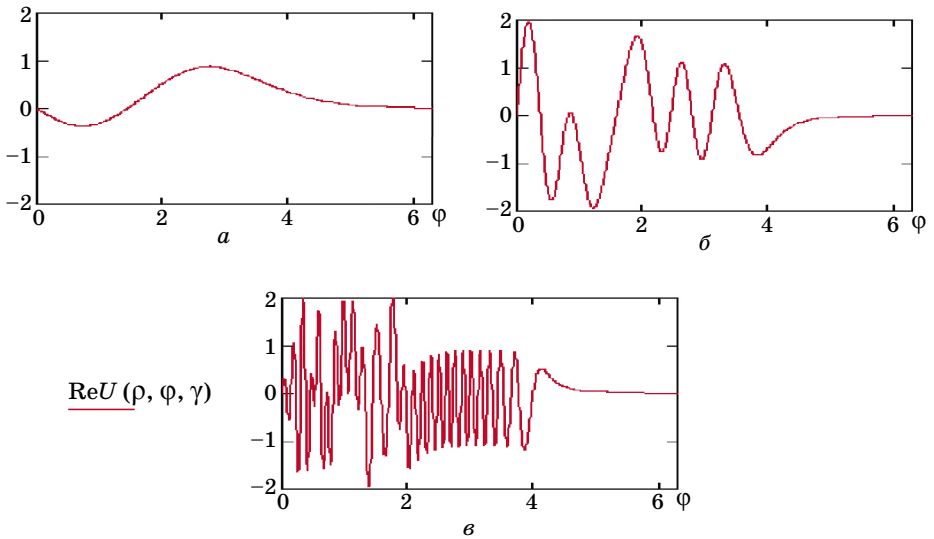


Рис. 9. Угловое распределение $\text{Re}U(\varphi)$ при наклонном ($\gamma = \pi / 3$) падении плоской волны на полуплоскость а — $\rho = 1$; б — $\rho = 10$; в — $\rho = 50$

Результаты численного моделирования эффектов дифракции представляют значительный интерес.

В процессе расчетов определяется комплексное решение уравнения Гельмгольца — функция $U(\rho, \varphi, \gamma)$. Физический смысл имеет, прежде всего, действительное значение электрического поля:

$$E_z(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(U(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)) = \text{Re}U(\mathbf{r})\cos(\omega t) + \text{Im}U(\mathbf{r})\sin(\omega t).$$

В этом выражении на равных правах фигурируют действительная и мнимая части решения уравнения Гельмгольца. Таким образом, в описании поля комплексная функция $U(\rho, \varphi, \gamma)$ участвует целиком.

В процессе численного моделирования мы определяли угловые и радиальные распределения для решения уравнения Гельмгольца $\text{Re}U(\mathbf{r})$, $\text{Im}U(\mathbf{r})$. Рассмотрены два случая падения плоской волны на полуплоскость — под прямым и наклонным углом к полуплоскости.

Весьма характерным является поведение $\text{Re}U$ и $|U|$ как функции угла при больших значениях радиусов, рис. 9в, рис. 5в. На этих графиках отчетливо просматриваются три области:

Для углов $0 < \varphi < \pi / 2$ имеет место интерференция падающей и отраженной волн. Амплитуда решения изменяется от -2 до 2 для $\text{Re}U$ и от 0 до 2 для $|U|$.

Для углов $\pi / 2 < \varphi < 3\pi / 2$ имеет место дифракция для падающей и прошедшей волны.

Для углов $3\pi / 2 < \varphi < 2\pi$ возникает геометрическая тень. В зону геометрической тени происходит диффузия электромагнитного поля из освещенной области.

Второй величиной, представляющей интерес, является интенсивность излучения, для стационарной задачи пропорциональная усредненной по времени объемной плотности энергии электромагнитного поля. Интенсивность излучения в электродинамике Максвелла описывается вектором Пойнтинга (2). Аналитика приводит к выражению (3), в которое также на равных правах входит $\text{Re}U$, $\text{Im}U$. Не представляет труда показать, что интенсивность невозмущенной плоской волны рав-

на единице. Из анализа результатов численного моделирования вытекает, что при нормальном падении в зоне интерференции падающей и отраженной волн интенсивность результирующей волны близка к нулю. Волны гасят друг друга. Вблизи к радиальной линии, при переходе через которую отраженная волна исчезает, интенсивность возмущена эффектом дифракции. В угловом секторе, где существует только падающая волна, интенсивность близка к единице и также возмущена эффектом дифракции. На единицу накладывается мелкая рябь. Вблизи линии перехода к геометрической тени дифракция усиливается. Амплитуда волновых колебаний интенсивности несколько возрастает. При переходе в зону геометрической тени интенсивность плавно стремится к нулю.

Авторы предлагают ввести характеристику:

$$s = \sqrt{\int_{\pi}^{\gamma+\pi} [I(\varphi) - 1]^2 d\varphi},$$

представляющую собой среднеквадратичное отклонение от единицы углового распределения интенсивности, искаженного дифракцией. Вычисления величины s представлены в таблице.

Среднеквадратичное отклонение дифрагировавшей волны от невозмущенной плоской волны

ρ	γ	s
30	$\frac{2\pi}{3}$	0,331
	$\frac{3\pi}{4}$	0,336
	$\frac{\pi}{2}$	0,330
	$\frac{\pi}{3}$	0,336
	$\frac{\pi}{4}$	0,341
	$\frac{\pi}{6}$	0,351
50	$\frac{2\pi}{3}$	0,295
	$\frac{3\pi}{4}$	0,295
	$\frac{\pi}{2}$	0,290
	$\frac{\pi}{3}$	0,294
	$\frac{\pi}{4}$	0,298
	$\frac{\pi}{6}$	0,303

В данной работе проведено численное моделирование дифракции ТЕ-волны, падающей из бесконечности на идеально-проводящую полуплоскость при нормальном и наклонном падении. В основу математической модели положено строгое решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца с условиями Зоммерфельда на бесконечности. Решение краевой задачи для ТЕ-волны выражается в виде разности

двух дифракционных контурных интегралов со сдвинутыми углами, которые в случае полуплоскости были сведены А. Зоммерфельдом, Ф. Франком и М. Борном к интегралам Френеля с переменным верхним пределом. В данной работе рассчитаны угловые распределения для дифракционных интегралов. Получены угловые и радиальные распределения для действительной части и модуля решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Получено аналитическое выражение для интенсивности излучения (пропорциональной усредненной по времени объемной плотности энергии электромагнитного поля). Вычислены угловые и радиальные распределения интенсивности в ближней и дальней зонах дифракции. Рассмотрены случаи нормального и наклонного падения плоской волны на полуплоскость. Введена в рассмотрение и вычислена «дисперсия» интенсивности для прошедшей плоской волны, искаженной эффектом дифракции. Показано, что величина дисперсии возрастает с уменьшением угла Зоммерфельда.

Список использованной литературы

1. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — М.: Наука, 1973. — 720 с.
2. Боровский А.В. Дифракционный интеграл Франка-Зоммерфельда / А.В. Боровский, А.Н. Бородин. — Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2012. — 64 с.
3. Бородин А.Н. Измерение светорассеяния в зависимости от радиуса кривизны края апертурной диафрагмы / А.Н. Бородин, А.Н. Малов, С.А. Чупраков // Компьютерная оптика. — 2005. — Вып. 28. — С. 87–88.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1982. — 512 с.
5. Гринберг Г.А. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на бесконечно-тонких идеально-проводящих экранах / Г.А. Гринберг, Ю.В. Пименов // Журнал теоретической физики. — 1957. — Т. 27. — Вып. 10. — С. 2826–2339.
6. Зоммерфельд А. Оптика / А. Зоммерфельд. — М.: ИЛ, 1953. — 486 с.
7. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред: 8 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Наука, 1982. — Т. 8. — 621 с.
8. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1972. — 735 с.
9. Франк Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики / Ф. Франк, Р. Мизес. — М.; Л.: ОНТИ, 1937. — 998 с.
10. Green G. Mathematical papers of the late George Green. London: Ferrers', 1871.
11. Kirchhoff G. Ann. d. physik. 1883. 18. p. 663.

Referenses

1. Born M. Osnovy optiki / M. Born, E. Vol'f. — М.: Nauka, 1973. — 720 s.
2. Borovskii A.V. Difraktsionnyi integral Franka-Zommerfel'da / A.V. Borovskii, A.N. Borodin. — Irkutsk: Izd-vo BGUEP, 2012. — 64 s.
3. Borodin A.N. Izmerenie svetorasseyaniya v zavisimosti ot radiusa krivizny kraya aperturnoi diafragmy / A.N. Borodin, A.N. Malov, S.A. Chuprakov // Komp'yuternaya optika. — 2005. — Vyp. 28. — S. 87–88.
4. Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoi fiziki / V.S. Vladimirov. — М.: Nauka, 1982. — 512 s.
5. Grinberg G.A. K voprosu o difraktsii elektromagnitnykh voln na beskonechno-tonkikh ideal'no-provodyashchikh ekranakh / G.A. Grinberg, Yu.V. Pimenov // Zhurnal teoreticheskoi fiziki. — 1957. — T. 27. — Vyp. 10. — S. 2826–2339.
6. Zommerfel'd A. Optika / A. Zommerfel'd. — М.: IL, 1953. — 486 s.
7. Landau L.D. Elektrodinamika sploshnykh sred: 8 t. / L.D. Landau, E.M. Lifshits. — М.: Nauka, 1982. — T. 8. — 621 s.
8. Tikhonov A.N. Uravneniya matematicheskoi fiziki / A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii. — М.: Nauka, 1972. — 735 s.

9. Frank F. *Differentsial'nye i integral'nye uravneniya matematicheskoi fiziki* / F. Frank, R. Mizes. — М.; Л.: ONTI, 1937. — 998 s.
10. Green G. *Mathematical papers of the late George Green*. London: Ferrers', 1871.
11. Kirchhoff G. *Ann. d. physik*. 1883. 18. p. 663.

Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, г. Иркутск, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Бородин Артур Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, г. Иркутск, e-mail: artur_b@mail.ru.

Галкин Андрей Леонидович — доктор физико-математических наук, заведующий сектором, Институт общей физики РАН им. А.М. Прохорова, г. Москва, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Authors

Borovsky Andrey Victorovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chair of Computer Science and Cybernetics, Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Borodin Artur Nikolaevich — PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Chair of Computer Science and Cybernetics, Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk, e-mail: artur_b@mail.ru.

Galkin Andrey Leonidovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chair of the Sector, General Physics Institute of RAS named after A.M. Prochorov, Moscow, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.